ECONOMIA AGRÍCOLA, RECURSOS NATURAIS, MEIO AMBIENTE E TEORIA ECONÔMICA

FUNÇÃO LUCRO E PREÇO LIMIAR

Kairat Turysbekovich Mynbaev

Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, de Almaty, Casaquistão; Mestre em Economia pela Oregon State University, USA; Professor visitante do Curso de Pós-Graduação em Economia (CAEN), Universidade Federal do Ceará (UFC).

RESUMO:

Usando a definição da função lucro $\pi(p,w)=\sup\{pf(x)-wx:x\geq 0\}$, encontramos a fronteira entre os preços que rendem o lucro finito e os que rendem o lucro infinito. A fronteira foi descrita usando o conceito de preço limiar que é a contribuição principal do trabalho. A vantagem do preço limiar é que, no que diz respeito à propriedade de lucro ser finito ou não, o comportamento do preço limiar é uma característica mais exata que o conceito de rendimentos de escala. Os resultados podem ser aplicados às tecnologias que não necessariamente exibem rendimentos de escala crescentes, em qualquer modelo que use a maximização de lucro como assunção de procedimento.

PALAVRAS-CHAVE:

Função Produção, Função Lucro, Preço Limiar, Economias de Escala.

1- INTRODUÇÃO

Rendimentos de escala crescentes constam um assunto importante na pesquisa econômica moderna. Na presença deles o equilíbrio geral no sentido clássico não existe o que gerou uma série de trabalhos que visam mudar tanto a noção de equilíbrio geral, como a de rendimentos de escala crescentes. SUZUKI (1996) e BONISSEAU (1992).

As dificuldades associadas com rendimentos de escala crescentes se manifestam já nas propriedades da função lucro

(1) $\pi(p,w) = \sup\{pf(x) - wx: x \geq 0\}$

que pode se tornar ao infinito. Neste trabalho procuramos a fronteira entre os preços que rendem o lucro finito e os que rendem o lucro infinito. A fronteira foi descrita usando o conceito de preço limiar que é a novidade principal do trabalho. A vantagem do preço limiar é que, no que diz respeito à propriedade de lucro ser finito ou não, o comportamento do preço limiar é uma característica mais exata que o conceito de rendimentos de escala.

As condições sendo muito gerais, os resultados podem ser aplicados às tecnologias que não necessariamente exibem rendimentos de escala crescentes, em qualquer modelo que use a maximização de lucro como a assunção de procedimento. Não assumimos nenhuma diferenciabilidade ou continuidade, convexidade ou concavidade. A tecnologia pode ser de produto múltiplo e o custo de insumo pode ser não-linear. Todos os resultados são relacionados ao preço limiar.

O autor agradece ao professor Ruben Pessoa da Universidade Federal de Roraima pela discussão dos resultados.

2- NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

A unidade produtiva (empresa) enfrenta três restrições: a restrição tecnológica f, a de mercado de produto P e a de mercado de insumo W.

A *tecnologia* (ou a função produção) f é uma correspondência que a cada vetor insumo $x = (x_1,...,x_n) \in R_+^n$ associa o conjunto $f(x) \subset R_+^m$ de vetores produtos que podem ser produzidos usando x e a tecnologia f. Aqui R_+ denota o conjunto de números reais não-negativos e R_+^n, R_+^m são conjuntos de vetores com coordenadas no R_+. A correspondência inversa f^{-1} a cada produto y que pertence à imagem $\Re(f)$ faz corresponder o conjunto $f^{-1}(y)$ de todos os insumos capazes de produzir y. A propriedade básica que liga f e f^{-1} é que a pertinência $y \in f(x)$ equivale a $x \in f^{-1}(y)$.

A *função demanda inversa* $P: R_+^m \to R_+^m$ é simplesmente o vetor de preços: se o produto for $y \in R_+^m$, então $P_1(y)y_1 + ... + P_m(y)y_m$ será o preço desse produto. É natural supor que $P_1(y) > 0$, ..., $P_m(y) > 0$ para todo $y \neq 0$. Se o mercado de produto for competitivo, P será um vetor constante: $P(y) \equiv p \in R_+^m$.

O custo de insumo $W: R_+^n \to R_+$ descreve o mercado de insumo. Para qualquer insumo $x \in R_+^n$, $W(x)$ significa o preço (não por unidade) desse insumo. Um dos exemplos é o custo de insumo linear, $W(x) = w_1x_1 + ... + w_nx_n$.

Para abreviar a notação, usamos o produto escalar $(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ para $x, y \in R^n$. Assim,

$P_1(y)y_1 + ... + P_m(y)y_m = (P(y),y)$, $w_1x_1 + ... + w_nx_n = (w,x)$.

$\|x\| = \left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)^{1/2}$ é a norma Euclidiana de x. A desigualdade $x' \geq x$ entre dois vetores significa que $x'_i \geq x_i$ para todo i. Pela definição, $p > 0 \Leftrightarrow p_1,...,p_m > 0$.

Como a primeira aproximação, o leitor pode pensar em f como uma função (para cada x, $f(x)$ é um escalar) e considerar (w,x) ao invés de $W(x)$. Alem disso, na maioria das vezes o supremo (sup) pode ser substituído pelo máximo (max) (analogamente, o ínfimo (inf) pelo mínimo (min)). Onde nós usamos o limite superior (lim sup), pode-se usar o limite (lim), supondo que esse existe. De maneira semelhante, o limite inferior (lim inf) coincide com o limite (lim) quando esse existe.

Para o produto $y \in \Re(f)$ fixo a *função custo*

$$c(y,W) = \inf\{W(x): x \in f^{-1}(y)\}$$

nos dá o custo mínimo de produção de y. No caso de f escalar essa definição se reduz a

$$c(y,W) = \inf\{W(x): f(x) \geq y\}.$$

Se $W(x) = (w,x)$, escrevemos $c(y,w)$ ao invés de $c(y,W)$.

Para o insumo $x \in R^n_+$ fixo *a receita gerada por x*

$$F(x,P) = \sup\{(P(y),y): y \in f(x)\}$$

mostra a receita máxima que pode ser obtida vendendo aos preços $P(y)$ os produtos y que podem ser produzidos usando x. No caso de $P(y) = p$ usamos a notação $F(x,p)$. Para f escalar temos

$$F(x,P) = \sup\{P(y)y: 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Em particular, $F(x,p) = pf(x)$.

A função lucro se obtém maximizando a diferença entre a receita e despesa:

$$\pi(P,W) = \sup\{(P(y),y) - W(x): y \in f(x), x \in R^n_+\}.$$

Aqui x percorre o conjunto de todos os insumos possíveis e para cada x, y percorre o conjunto de todos os produtos que podem ser produzidos usando x. Usaremos a notação $\pi(p,w)$ quando $P(y) = p$, $W(x) = (w,x)$.

Otimizando primeiro com respeito ao produto, obteremos

$$\pi(P,W) = \sup\{\sup\{(P(y),y) - W(x): y \in f(x)\} x \in R^n_+\} =$$
$$= \sup\{F(x,P) - W(x): x \in R^n_+\}.$$

Por outro lado, desde que $y \in f(x)$ equivale a $x \in f^{-1}(y)$, podemos otimizar antes com respeito ao insumo e depois com respeito ao produto:

$$\pi(P,W) = \sup\{\sup\{(P(y),y) - W(x): x \in f^{-1}(y)\} y \in \Re(f)\} =$$

$$= \sup\{(P(y),y) - c(y,W): y \in \Re(f)\}.$$

Em resumo, do ponto de vista matemático, a função $F(\cdot,P)$ desempenha o mesmo papel que $c(\cdot,W)$, reduzindo o número de variáveis e simplificando condições.

3- DEFINIÇÃO DE PREÇO LIMIAR

Seja $P(y) = p$. É fácil de mostrar que o lucro é monótono com respeito ao preço p:

(2) $$p' \geq p \Rightarrow \pi(p',W) \geq \pi(p,W).$$

Vamos normalizar o vetor preço p^0 pondo $\sum_{i=1}^m p_i^0 = 1$ e consideremos os preços proporcionais $p = tp^0$. De (2) pode-se ver que o lucro $\pi(tp^0,W)$ não decresce ao longo do raio $\{tp^0: t > 0\}$. Então se $\pi(tp^0,W)$ for finito em algum t, ele será finito em todos os menores, $t' < t$, e se ele acontecer de ser infinito em algum t, então será infinito em todos os maiores, $t'' > t$. Logo existe um $t_0 = t_0(p^0)$ que separa os preços tp^0 que rendem o lucro finito dos que rendem o lucro infinito. Chamaremos o numero $T(p^0) = t^0$ de *fator limiar* e o preço $T(p^0)p^0$ de *preço limiar na direção de* p^0. Matematicamente,

(3) $T(p^0) = \sup\{t > 0: \pi(tp^0,W) < \infty\} = \inf\{t > 0: \pi(tp^0,W) = \infty\}$

para qualquer p^0 que pertence ao simplex $S = \{p > 0: \sum p_i = 1\}$.

Exemplo 1. Consideremos a função produção

$$f(x) = x^\alpha, x \geq 0\ (\alpha > 0).$$

Dados os preços p e w, a função lucro da empresa será igual a (1). Pode-se calcular que

$$\pi(p,w)=\begin{cases}\infty & \forall p>0,\ \text{se } \alpha>1,\\ \infty & \forall p>w,\ \text{se } \alpha=1,\\ 0 & \forall p\le w,\ \text{se } \alpha=1,\end{cases}$$
$$\pi(p,w)<\infty\ \forall p>0,\ \text{se } 0<\alpha<1.$$

É claro que $S = \{1\}$. Podemos ver que $T(1) = 0$ (o preço limiar é zero), se $\alpha > 1$, $T(1) = w$, se $\alpha = 1$, e $T(1) = \infty$, se $\alpha < 1$. O caso $\alpha > 1$ é o caso de rendimentos de escala crescentes.

4- A FÓRMULA DO FATOR LIMIAR EM TERMOS DE INSUMOS

$\|x\|$ sendo a norma Euclidiana do vetor x, escrevemos $x \to \infty$ se $\|x\| \to \infty$. Denotemos $\|f(x)\| = \sup\{\|y\|: y \in f(x)\}$. A função g: $R_+^n \to R_+$ é chamada *localmente limitada*, se ela é limitada, $g(x) \le c(r)$, em cada bola $\{x\in R_+^n: \|x\| \le r\}$, $r > 0$.

Teorema 1. Suponha que $P(y) = p$, $\|f(\cdot)\|$ é localmente limitada, W é não-negativa, localmente limitada e

$$\lim_{x\to\infty} W(x) = \infty.$$

Então o fator limiar é igual a

$$T(p) = \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)},\ \text{seja qual for } p \in S.$$

Demonstração. A fórmula do $T(p)$ será obtida como a conseqüência de duas estimativas: inferior e superior. A prova utiliza somente a homogeneidade de $F(x,p)$ de grau 1 com respeito a p e a igualdade

$$\pi(tp^0,W) = \sup\{tF(x,p^0) - W(x): x \in R_+^n\},\quad p^0 \in S.$$

Denotemos

$$M_+ = \{x: tF(x,p^0) - W(x) \ge 0\},\quad \alpha = \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p^0)}.$$

Para se assegurar que $\pi(tp^0,W) < \infty$ é suficiente verificar que $\sup\{tF(x,p^0) - W(x): x \in M_+\} < \infty$.

A estimativa inferior é de forma

$T(p^0) \ge \alpha$ sempre que $0 \le \alpha \le \infty$.

Visto que o caso $\alpha = 0$ é trivial, consideremos $\alpha > 0$.

Se $\alpha < \infty$, então da sua definição se segue que para todo $0 < \varepsilon < \alpha$ existe $r > 0$ tal que

$$\frac{W(x)}{F(x,p^0)} \ge \alpha - \varepsilon \quad \forall \|x\| > r. \tag{4}$$

Suponha que $t < \alpha$ e ε seja suficiente pequeno a ponto de satisfazer $t < \alpha - 2\varepsilon$. Então para $\|x\| > r$ teremos

$$F(x,tp^0) - W(x) = F(x,p^0)\left(t - \frac{W(x)}{F(x,p^0)}\right) < F(x,p^0)(\alpha - 2\varepsilon - \alpha + \varepsilon) < 0$$

de modo que $M_+ \subset \{x: \|x\| \le r\}$. $\pi(tp^0,W) < \infty$ porque F é localmente limitada e

$$\sup\{tF(x,p^0) - W(x): x \in M_+\} \le t\sup\{F(x,p^0): \|x\| \le r\} < \infty.$$

Se $\alpha = \infty$, então invés de (4) teremos: seja qual for $N > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\frac{W(x)}{F(x,p^0)} \ge N \quad \forall \|x\| \ge r.$$

A partir de $t > 0$ qualquer, podemos escolher $N = t + 1$ e chegar a

$$tF(x,p^0) - W(x) = F(x,p^0)\left(t - \frac{W(x)}{F(x,p^0)}\right) \le F(x,p^0)(N-1-N) < 0\ \forall \|x\| > r.$$

Novamente, $M_+ \subset \{x: \|x\| \le r\}$ e $\pi(tp^0,W) < \infty$.

Nos últimos dois parágrafos nós mostramos que $\pi(tp^0,W) < \infty\ \forall t < \alpha\ (\le \infty)$. Isso nos leva à estimativa inferior. MOLDOVANU (1994).

A estimativa superior parece assim:

$T(p^0) \le \alpha$ sempre que $0 \le \alpha \le \infty$.

Assuma $\alpha < \infty$ para evitar a trivialidade. Por definição, para todo $\varepsilon > 0$ existe a seqüência $\{x^N\}$ tal que

$$\frac{W(x^N)}{F(x^N,p^0)} \le \alpha + \varepsilon, \quad \|x^N\| \to \infty.$$

Pegue qualquer um $t > \alpha$ e escolha ε que satisfaz $t \ge \alpha + 2\varepsilon$. Então

$$t - \frac{W(x^N)}{F(x^N,p^0)} \ge \alpha + 2\varepsilon - \alpha - \varepsilon = \varepsilon.$$

Por isso

$$\pi(tp^0,W) \ge \sup_N F(x^N,p^0)\left(t - \frac{W(x^N)}{F(x^N,p^0)}\right) \ge$$

$$\ge \varepsilon \sup_N F(x^N,p^0) \ge \frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} \sup_N W(x^N) = \infty$$

porque $W(x^N) \to \infty$. Assim, $\pi(tp^0,W) = \infty$ para todo $t > \alpha$ e a estimativa superior segue.

Observação. Do último parágrafo da prova podemos ver que ao invés de requer $\lim_{\|x\| \to \infty} W(x) = \infty$ nós poderíamos impor a condição $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$.

Exemplo 2. Usando a função Cobb-Douglas

$y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

e a função de elasticidade de substituição constante

$y = (a_1x_1^{\rho} + a_2x_2^{\rho})^{1/\rho}$

definamos a correspondência

$f(x) = \{y_1,y_2 \ge 0: (a_1y_1^{\rho} + a_2y_2^{\rho})^{1/\rho} \le Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}\}$

onde todos os parâmetros são assumidos constantes. Para que o conjunto $f(x)$ seja estritamente convexo suponhamos $\rho > 1$. (No caso $a_1 = a_2$, $\rho = 2$ $f(x)$ será um quarto de disco). Então o insumo x gera a receita

$F(x,p) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}(p_1c_1 + p_2c_2)$

onde

$$c_1 = (a_1c_0^{\rho} + a_2)^{-1/\rho},\ c_2 = (a_1 + a_2c_0^{-\rho})^{-1/\rho},\ c_0 = \left(\frac{p_1a_2}{p_2a_1}\right)^{1/(\rho-1)}.$$

Suponha que W é homogênea de grau $\gamma > 0$. A aplicação do Teorema 1 nos dá o seguinte.

a) Se $\alpha + \beta < \gamma$ (o que significa que a capacidade produtiva cresce menos rapidamente do que o custo de insumo), então $T(p) = \infty$ para qualquer $p \in S$, ou seja, $\pi(p,W) < \infty$ para qualquer $p > 0$.

b) Se $\alpha + \beta > \gamma$ (a capacidade produtiva cresce mais rapidamente do que o custo de insumo), então $T(p) = 0$ para qualquer $p \in S$. Isto quer dizer que $\pi(p,W) = \infty$ para qualquer $p > 0$.

c) No caso $\alpha + \beta = \gamma$ denotemos

(5) $c_3(p) = A(p_1c_1 + p_2c_2)\sup\{x_1^{\alpha}x_2^{\beta}: W(x) = 1\}$.

Nesse caso $T(p) = 1/c_3(p)$, $p \in S$. A interpretação é que $\pi(tp,W) < \infty$ para qualquer $t < T(p)$ e $\pi(tp,W) = \infty$ para qualquer $t > T(p)$.

5- A FÓRMULA DO FATOR LIMIAR EM TERMOS DE PRODUTOS

O seguinte resultado é dual ao Teorema 1 no sentido de que um deles é expresso em termos da função receita (função produção no caso de produto único) e outro em termos da função custo.

Teorema 2. Suponha que $P(y) = p$, $\left\| f(\cdot) \right\|$ é localmente limitada, W é não-negativa e localmente limitada. Então o fator limiar é igual a

$$T(p) = \liminf_{y \to \infty} \frac{c(y,W)}{(p,y)}, \text{ seja qual for } p \in S.$$

Exemplo 3. Se a função produção for Cobb-Douglas, como no Exemplo 2, e o custo de insumo W for linear, $W(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2$, então a função custo será igual a

$$c(y,w) = c(A, \alpha, \beta, w) y^{1/(\alpha+\beta)}$$

onde

$$c(A,\alpha,\beta,w) = \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \right)^{\alpha} \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta} \right)^{\beta} \right]^{1/(\alpha+\beta)} w_1^{\alpha/(\alpha+\beta)} w_2^{\beta/(\alpha+\beta)}.$$

Logo

$$T(p) = c(A,\alpha,\beta,w) \liminf_{y \to \infty} \frac{y^{1/(\alpha+\beta)}}{py} = \begin{cases} \infty, & \alpha+\beta < 1 \\ 0, & \alpha+\beta > 1 \\ c(A,\alpha,\beta,w/p, & \alpha+\beta = 1 \end{cases}$$

A conclusão é que $\pi(p,w) < \infty$ para quaisquer p,w, se $\alpha + \beta < 1$, $\pi(p,w) = \infty$ para quaisquer p,w, se $\alpha + \beta > 1$, e no caso $\alpha + \beta = 1$ há duas possibilidades: $\pi(p,w) < \infty$ para $p < c(A, \alpha, \beta, w)$ e $\pi(p,w) = \infty$ para $p > c(A, \alpha, \beta, w)$.

6- O LUCRO COM O PREÇO DE PRODUTO IGUAL AO PREÇO LIMIAR

Consideremos o lucro $\pi(tp,W)$ ao longo do raio $\{tp: t > 0\}$ com $p \in S$ fixo. A equação (3) nos diz que o lucro é finito para todo $t < T(p)$ e infinito para todo $t > T(p)$. O que acontece se $t = T(p)$? O Exemplo 1 mostra que o lucro pode ser finito. O seguinte exemplo mostra que o contrário também é possível.

Exemplo 4. Seja $n = m = 1$, $f(x) = x + \ln(x + 1)$, $P(y) = p$, $W(x) = wx$. Obviamente, $S = \{1\}$ e pelo Teorema 1

$$T(1) = \liminf_{x \to \infty} \frac{wx}{x + \ln(x+1)} = w.$$

Portanto

$$\pi(T(1)1,w) = \sup\{wf(x) - wx : x \geq 0\} =$$

$$= w \sup\{\ln(x + 1): x \geq 0\} = \infty.$$

O próximo teorema descreve precisamente todas as situações nas quais

(6) $\qquad \pi(T(p)p,w) < \infty.$

Nós podemos excluir os casos $T(p)=0$ e $T(p)=\infty$ como triviais.

Teorema 3. Assuma que $P(y) = p$, f é localmente limitada, W é não-negativa, localmente limitada e tal que

$$\lim_{x \to \infty} W(x) = \infty.$$

Consideremos qualquer $p \in S$. Sejam f e W tais que $0 < T(p) < \infty$. Então (6) equivale a cada uma das condições

(7) $\qquad \limsup_{y \to \infty} [(p,y)T(p) - c(y,W)] < \infty,$

(8) $\qquad \limsup_{x \to \infty} [F(x,p)T(p) - W(x)] < \infty.$

A prova é simples e utiliza o fato de que uma função localmente limitada é limitada por toda a parte se e somente se ela é limitada numa vizinhança do infinito.

7- AS PROPRIEDADES DE PREÇO LIMIAR COM RESPEITO A PREÇOS DE INSUMOS

O preço limiar foi definido como o produto $T(p)\ p$, $p \in S$. Suponha que $W(x) = (w, x)$. Então o preço limiar, além de p, dependerá também de w: $T(p,w)p$. Por exemplo, nas condições do Exemplo 3

(9) $\quad T(p,w)p = (A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta})^{-1}w_1^{\alpha}w_2^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$.

O próximo resultado demonstra que no caso geral $T(p,w)p$ possui as propriedades da função produção homogênea de grau 1.

Teorema 4. Suponha que f, P, W satisfaçam as condições do Teorema 1 e $W(x) = (w,x)$. Então o preço limiar $T(p,w)p$ possui as propriedades

a) monotonicidade: se $w' \geq w$, então $T(p,w')p \geq T(p,w)p$,

b) homogeneidade: $T(p,tw)p = tT(p,w)p$,

c) concavidade: sejam quais forem $w,w' > 0$ e $t \in [0,1]$,

$T(p,tw + (1 - t)w')p \geq tT(p,w)p + (1 - t)T(p,w')p$,

d) continuidade: $T(p,w)p$ é contínuo como a função de w.

Para provar a), b) e c) basta aplicar o Teorema 1. c) é a conseqüência da desigualdade

$$\frac{1}{\lambda(w',w)}T(p,w')p \leq T(p,w)p \leq \lambda(w',w)T(p,w')p$$

onde $\lambda(w,w') = \max_i w_i / w_i' \to 1$ quando $w' \to 1$.

Exemplo 5. Aqui nós continuaremos o Exemplo 2. O resultado será mais geral do que descrito em (9) porque agora o produto é um vetor bidimensional. Supondo que $W(x) = (w,x)$ e calculando a constante (5) obteremos o seguinte.

a) Se $\alpha + \beta < 1$ (a função produção exibe rendimentos de escala decrescentes), então $T(p,w)p = \infty$ para todo $p \in S$.

b) Se $\alpha + \beta > 1$ (a função produção exibe rendimentos de escala crescentes), então $T(p,w)p = 0$ para todo $p \in S$.

c) Se $\alpha + \beta = 1$, então

$$T(p,w)p = (A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta})^{-1}w_1^{\alpha}w_2^{\beta}\frac{p}{p_1c_1 + p_2c_2}, \text{ onde } p_1 + p_2 = 1.$$

8- A GEOMETRIA DOS PREÇOS DO PRODUTO QUE RENDEM O LUCRO FINITO

Vamos definir conjuntos *FIN* e *INF* como

$FIN = \{p > 0: \pi(p,W) < \infty\}$, $INF = \{p > 0: \pi(p,W) = \infty\}$.

É claro que $INF = \{p \in R_+^m: p > 0\}\backslash FIN$ (*INF* é o conjunto complementar do *FIN*). Qual é a forma do conjunto *FIN*? Em particular, sob quais condições *FIN* é vazio? Essas questões têm a ver com as seguintes noções. Nós dizemos que o problema de maximização de lucros (ML) é 1) *correto* (*bem-posado*), se *INF* é vazio, 2) *semi-correto*, se tanto *FIN*, como *INF* não são vazios, e 3) *incorreto* (*mal-posado*), se *FIN* é vazio.

Teorema 5. Suponha que P, f, W satisfaçam as condições do Teorema 1.

a) O conjunto *FIN* é convexo. Com cada $p \in FIN$ esse conjunto contem o retângulo $\{p': 0 \leq p' \leq p\}$. *FIN* é limitado pelos planos de coordenadas $\{p: p_i = 0\}$, $i = 1, ..., m$, e pela superfície

$$\left\{ p \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)} : \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\}.$$

b) Existem somente três possibilidades: ou

(10) $\quad T(p) = \infty$ seja qual for $p \in S$,

ou

(11) $0 < T(p) < \infty$ seja qual for $p \in S$,

ou

(12) $T(p) = 0$ seja qual for $p \in S$,

c) As seguintes equivalências são válidas:

O problema de ML é correto

$$\Leftrightarrow (10) \Leftrightarrow \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)} = \infty \ \forall p \in S$$

O problema de ML é semi-correto

$$\Leftrightarrow (11) \Leftrightarrow 0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)} < \infty \ \forall p \in S$$

O problema de ML é incorreto

$$\Leftrightarrow (12) \Leftrightarrow \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)} = 0 \ \forall p \in S$$

A prova segue logo dos resultados anteriores.

9- QUANDO O LUCRO DA EMPRESA É FINITO?

Mais exatamente, o objetivo é caracterizar, em termos mais simples na medida do possível, todos os triplos (p,f,W) para os quais $\pi(p,f,W) < \infty$.

Teorema 6. Seja p representado como $p = tp^0$, $p^0 \in S$. Sob as condições do Teorema 1 podemos afirmar o seguinte.

a) O lucro $\pi(p,f,W)$ é finito se, e somente se, uma das condições

1) $t < \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)}$

ou

2) $t = \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)}$ e $\limsup_{x\to\infty} [tF(x,p) - W(x)] < \infty$

tiver validade.

b) $\pi(p,f,W)$ é finito se, e somente se, uma das condições

1) $t < \liminf_{y\to\infty} \frac{c(y,W)}{(p,y)}$

ou

2) $t = \liminf_{y\to\infty} \frac{c(y,W)}{(p,y)}$ e $\limsup_{y\to\infty} [t(p,y) - c(y,W)] < \infty$

tiver validade.

A prova é uma conseqüência imediata dos resultados prévios.

10- CARACTERIZAÇÃO DE ECONOMIAS DE ESCALA DECRESCENTES

Dados f,W, diremos que a unidade produtiva que enfrenta as restrições f,W *exibe economias de escala decrescentes*, se

$$\lim_{y\to\infty} \frac{c(y,W)}{(p,y)} = \infty \text{ seja qual for } p > 0.$$

Teorema 7. A unidade produtiva exibe economias de escala decrescentes, se e somente se,

$$(13) \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{W(x)}{F(x,p)} = \infty \text{ seja qual for } p > 0.$$

Nessa condição as palavras "seja qual for" podem ser substituídas por "para um". A condição (13) equivale a seguinte:

$$(14)\quad \begin{cases} \text{para quaisquer } \varepsilon \text{ e } p \text{ positivos existe uma constante } C = C(\varepsilon, p) > 0 \text{ tal que} \\ \\ F(x, p) \le \varepsilon W(x) + C \text{ para todo } x \ge 0. \end{cases}$$

Quando $W(x) = (w,x)$, a condição (14) quer dizer que $F(x,p)$ cresce mais lentamente do que qualquer função linear positivamente inclinada.

Para provar o Teorema 7 basta comparar as expressões do preço limiar dos Teoremas 1 e 2.

11- O LUCRO DE UM MONOPOLISTA

O mercado de produto é descrito pela função demanda inversa P a respeito da qual nós supomos que

$$(15)\quad \begin{cases} P(y) > 0 \text{ para todo } y \ne 0 \\ \text{e} \\ \sup\{P_i(y): \|y\| \ge r\} < \infty \text{ para todo } r > 0,\ i = 1,\dots,m, \end{cases}$$

isto é, os preços $P_1(y),\dots,P_m(y)$ podem subir até o infinito só quando $y \to 0$. f e W vão satisfazer as mesmas condições que no Teorema 1, a saber

(16) $\|f(\cdot)\|$ é localmente limitada,

(17) W é não-negativa, localmente limitada e $\lim_{x\to\infty} W(x) = \infty$.

Note que essas condições não excluem a possibilidade

(18) $\limsup_{x\to 0} F(x,P) = \infty.$

Teorema 8. Suponha que f,P e W satisfaçam (15), (16), (17). Denotemos $T = \liminf_{x\to\infty} \dfrac{W(x)}{F(x,P)}$. O lucro de monopolista $\pi(f,P,W)$ é finito se, e somente se,

$$\limsup_{x\to 0} F(x,P) < \infty$$

e vale uma das condições

1) $T > 1$,

2) $T = 1$ e $\limsup_{x\to\infty} [F(x,P) - W(x)] < \infty$.

A prova se obtem repetindo algumas partes das provas dos Teoremas 1 e 3.

12- BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BONNISSEAU, J.-M. Existence of equlibria in the presence of increasing returns: a synthesis. **Journal of Mathematical Economics**. v. 21, n. 5, 1992, p. 441.

FÄRE, Rolf and GROSSKOPF , Shawna. **Cost and revenue constrained production**. New York: Springer-Verlag , 1994.

HAMANO, T. Increasing returns and aggregate production efficiency by a monopoly. **Journal of Economics = Zeitschrift Fur Nationalokonomie**. v. 64, n.2, 1996, p. 155.

MOLDOVANU, B., WINTER, E. Core implementation and increasing returns to scale for cooperation. **Journal of Mathematical Economics**. v. 23, n.6, 1994, p. 533.

RIVARD, Brian A. Monopolistic competition, increasing returns, and self-fulfilling prophecies. **Journal of Economic Theory**. v. 62, n.. 2, 1994, p. 346.

SHANNON, Chris. Increasing returns in infinite-horizon economies. **The Review of Economic Studies**. v. 64, n.. 218, 1997, p. 73.

SUZUKI, Takashi. Intertemporal general equilibrium model with external increasing returns. **Journal of Economic Theory**. v. 69, n. 1, 1996, p. 117.

VARIAN, Hal R. **Microeconomic analysis**. 3rd ed. Norton: New York, 1992